BEZPŁATNA LEKCJA PRZYKŁADOWA

Wahadło matematyczne

Pakiet wprowadzający do drgań

01 Wahadło matematyczne
Wahadło matematyczne · 45 min

Karty pracy dla uczniów | Linki do doświadczeń | Pytania o przewidywania | Tabele danych | Wyjaśnienia odpowiedzi | Poradnik dla nauczyciela

© 2026 PSL · Physics Simulations Lab · pslsimulations.com. Licencja dla jednego nauczyciela: możesz drukować i udostępniać te strony swoim uczniom, także na stronie klasy chronionej hasłem. Prosimy nie publikować ich publicznie ani nie przekazywać innym nauczycielom. Z symulacji można korzystać bezpłatnie w dowolnym momencie.

Polski · Tłumaczenie wspomagane maszynowo. Wersją odniesienia jest wydanie angielskie.

Lekcja 1 · Karta pracy dla ucznia · Wahadło matematyczne

Symulacja: Wahadło matematyczne **Czas:** około 45 min **Poziom:** Klasy 9–12 · kurs wprowadzający na studiach

Imię i nazwisko Data Klasa

Otwórz doświadczenie: w PSL wyszukaj „Simple pendulum” (wahadło matematyczne).
pslsimulations.com/#/lab/mechanics-lab/pendulum

Cele lekcji

- Zmierz, jak okres drgań wahadła zależy od jego długości.
- Znajdź kąt początkowego wychylenia, przy którym wzór dla małych kątów $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$ przestaje być dokładny.

Okres drgań wahadła T to czas jednego pełnego wahnięcia tam i z powrotem. Dla małych wychyleń fizyka przewiduje $T = 2\pi\sqrt{(L/g)}$, gdzie L to długość, a $g = 9.81\ m/s^2$. Symulacja wyświetla ten „okres dla małych kątów” jako odczyt, ale w rzeczywistości modeluje pełne drgania przy dowolnym kącie wychylenia. Twoim zadaniem jest ustalić, kiedy odczyt przestaje mówić prawdę.

Elementy sterowania i odczyty, których będziesz używać: Długość (0.5–3 m) · Kąt początkowego wychylenia (5–150°) · odczyt: Okres dla małych kątów

1 · Przewiduj

Zanim zaczniesz korzystać z symulacji

P1 Jeśli zwiększysz długość wahadła 4 razy, jego okres…

☐ pozostanie taki sam ☐ wydłuży się dwukrotnie ☐ wydłuży się 4 razy ☐ skróci się o połowę

Na ile masz pewność? ① ② ③ ④ ⑤ (1 = zgaduję, 5 = mam pewność)

P2 Czy kąt początkowego wychylenia zmienia okres drgań? Przewidź okres przy 10° i przy 120° dla wahadła o długości 1.5 m.

P3 Przy jakim mniej więcej kącie, twoim zdaniem, błąd wzoru przekroczy 5%?

2 · Zbadaj

Zmieniaj tylko jedną rzecz naraz

Część A · Długość

1. Ustaw kąt początkowego wychylenia na 10°. Pozostaw prędkość odtwarzania na 1×.
2. Dla każdej długości odczytaj okres dla małych wychyleń, a następnie zmierz stoperem czas 5 pełnych drgań i podziel go przez 5.

Długość L (m)	Odczyt T (s)	Czas 5 drgań (s)	Zmierzony T (s)	T^2 (s^2)
0.5				
1.0				
1.5				
2.0				
3.0				

Część B · Kąt

1. Ustaw długość na 1.5 m. Odczyt powinien wynosić 2.46 s.
2. Dla każdego kąta początkowego wychylenia zmierz czas 5 pełnych drgań i wyznacz zmierzony okres. Następnie oblicz różnicę procentową: (zmierzony okres − 2.46) ÷ 2.46 × 100.

Kąt początkowego wychylenia	Czas 5 drgań (s)	Zmierzony T (s)	Różnica w % względem 2.46 s
10°			
35°			
60°			
90°			
120°			
150°			

3 · Wyjaśnij

Wykorzystaj swoje dane

E1 Wykorzystaj dane z części A: co stało się z okresem, gdy długość wzrosła z 0.5 m do 2.0 m (4 razy większa długość)? Czy twoje przewidywanie P1 było poprawne?

E2 Sporządź wykres T^2 w zależności od L. Opisz wykres i wyznacz jego współczynnik kierunkowy. Skorzystaj ze wzoru slope = $4\pi^2/g$, aby obliczyć g.

E3 Dla jakiego kąta w części B zmierzony okres po raz pierwszy różnił się od odczytu o więcej niż 5%?

E4 We wzorze przyjęto $\sin\theta \approx \theta$. Wyjaśnij, dlaczego wahadło puszczone z dużego kąta wychylenia wykonuje drgania wolniej, niż przewiduje wzór.

ZADANIE NA ZAKOŃCZENIE

Zegar stojący ma wahadło o długości 1.0 m. (a) Oblicz jego okres. (b) Jeśli wprawimy wahadło w drgania o większej amplitudzie, czy zegar będzie się spieszył, czy spóźniał? Dlaczego?

Lekcja 1 · Poradnik dla nauczyciela · Wahadło matematyczne

Symulacja: Wahadło matematyczne **Czas:** około 45 min
Matematyka: Algebra, pierwiastki kwadratowe (opcjonalnie tworzenie wykresów)

Link do eksperymentu: pslsimulations.com/#/lab/mechanics-lab/pendulum

Omówienie

Uczniowie potwierdzają zależność $T \propto \sqrt{L}$, a następnie odkrywają, że znany wzór jest przybliżeniem, które zawodzi przy dużych wychyleniach. Symulacja całkuje pełne równanie nieliniowe $d^2\theta/dt^2 = -(g/L)\sin\theta$, więc zmierzone okresy przy dużych kątach są rzeczywiście dłuższe niż wskazania odczytu. Drgania przebiegają w czasie rzeczywistym przy 1×: zmierzyliśmy 2.47 s przy 10° i 3.37 s przy 120° dla L = 1.5 m.

Przed lekcją

Otwórz symulację raz przed lekcją. Uczniowie potrzebują stopera (może być w telefonie). Dobrze sprawdza się praca w parach: jedna osoba uruchamia wahadło przyciskiem Reset, druga mierzy czas.

Typowe błędne przekonania

- Cięższe ciężarki wahadła drgają szybciej. (Masa nie występuje we wzorze; symulacja wykorzystuje masę punktową.)
- Podwojenie długości podwaja okres. (Powoduje pomnożenie okresu przez $\sqrt{2} \approx 1.41$.)
- Amplituda nigdy nie ma znaczenia. (Ma znaczenie przy dużych kątach, co jest tematem części B.)

Klucz odpowiedzi z wyjaśnieniami

P1

Podwoi się. $T \propto \sqrt{L}$, więc 4× większa długość daje $\sqrt{4} = 2\times$ dłuższy okres.

P2

Przy 10° okres wynosi około 2.46 s, zgodnie z odczytem. Przy 120° wynosi około 3.37 s, czyli jest o około 37% dłuższy.

P3

Zaakceptuj każdą uzasadnioną prognozę. Porównaj ją z wynikami prób w części B.

Część A

Odczyty: 0.5 m → 1.42 s, 1.0 m → 2.01 s, 1.5 m → 2.46 s, 2.0 m → 2.84 s, 3.0 m → 3.47 s. Zmierzone czasy powinny zgadzać się z nimi z dokładnością do około 0.1 s. T^2 — wartości: 2.01, 4.03, 6.04, 8.05, 12.1 s^2.

Część B

Oczekiwane zmierzone okresy przy L = 1.5 m: 10° → 2.46 s (+0.2%), 35° → 2.52 s (+2.4%), 60° → 2.64 s (+7.3%), 90° → 2.90 s (+18%), 120° → 3.37 s (+37%), 150° → 4.33 s (+76%).

E1

Okres podwoił się (1.42 s → 2.84 s). Czterokrotne zwiększenie długości podwaja okres, ponieważ $T \propto \sqrt{L}$.

E2

Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych, współczynnik kierunkowy ≈ 4.0 s^2/m. $g = 4\pi^2 \div 4.02 \approx 9.8$ m/s^2. Wyniki uczniów odbiegające od tej wartości o nie więcej niż około 5% są poprawne.

E3

Spośród badanych kątów 60° to pierwszy, dla którego różnica przekracza 5%. Przy 35° wynosi ona 2,4%, a przy 60° wynosi 7,3%.

E4

Siła przywracająca równowagę wynosi $mg \sin\theta$. Przy dużych kątach $\sin\theta$ jest wyraźnie mniejszy od θ ($\sin 90° = 1$, podczas gdy 90° = 1.57 rad), więc siła skierowana ku położeniu równowagi jest słabsza, niż zakłada wzór. Słabsza siła przywracająca równowagę oznacza wolniejszy powrót i dłuższy okres.

Zadanie na zakończenie lekcji

(a) $T = 2\pi\sqrt{(1.0/9.81)} \approx 2.01$ s. (b) Będzie się spóźniał. Większe wychylenia oznaczają dłuższy okres, więc wahadło wykonuje mniej drgań w ciągu godziny i zegar się spóźnia.

Zadanie dodatkowe

W symulacji g ma stałą wartość 9.81 m/s^2, więc nie można bezpośrednio pokazać warunków na innym ciele niebieskim. Poleć uczniom, aby za pomocą wzoru obliczyli okres wahadła o długości 1.5 m na Księżycu ($g = 1.62$ m/s^2): $T = 2\pi\sqrt{(1.5/1.62)} \approx 6.05$ s, czyli około 2.5 razy dłuższy niż na Ziemi.

Dostosowanie poziomu trudności

Wsparcie: udostępnij tabelę z wypełnioną kolumną T^2 i pomiń wyznaczanie współczynnika kierunkowego. Wyzwanie: porównaj wyniki części B z rozwinięciem w szereg $T \approx T_0(1 + \theta_0^2/16)$, gdzie θ_0 jest wyrażone w radianach, i ustal, kiedy to przybliżenie przestaje być poprawne.

PSL

Pakiet wprowadzający do drgań / Pakiet tematyczny „Drgania i fale”

Pakiet wprowadzający do drgań · 19 USD

- Wahadło matematyczne
- Rezonans w układzie sprężynowym z wymuszeniem
- Wahadła sprzężone i przekazywanie energii

Pakiet tematyczny „Drgania i fale” · 49 USD

- Wahadło matematyczne
- Rezonans w układzie sprężynowym z wymuszeniem
- Wahadła sprzężone i przekazywanie energii
- Fale stojące na strunach i w rurach
- Wzory rezonansowe na membranie bębna
- Figury Chladniego i symetria

Sprawdzian z działu + klucz odpowiedzi · 12 pytań

Dwutygodniowy plan realizacji i lista pojęć